ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Neka je x najveći zajednički djelitelj brojeva 2^{2023} i 2^{2024}, a y njihov najmanji zajednički višekratnik. Izračunajte $3y - x - 2 \cdot \frac{x^2}{y}$ i rezultat zapišite u obliku potencije s bazom 2.

Rješenje.

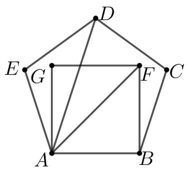
Očito je $x = 2^{2023}$, a $y = 2^{2024}$. — 2 boda

Dakle, dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
3y - x - 2 \cdot \frac{x^2}{y} &= 3 \cdot 2^{2024} - 2^{2023} - 2 \cdot \frac{(2^{2023})^2}{2^{2024}} \\
&= 6 \cdot 2^{2023} - 2^{2023} - 2 \cdot \frac{2^{4046}}{2^{2024}} && \text{1 bod} \\
&= 5 \cdot 2^{2023} - 2 \cdot 2^{2022} && \text{1 bod} \\
&= 5 \cdot 2^{2023} - 2^{2023} && \text{1 bod} \\
&= 4 \cdot 2^{2023} = 2^{2025} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Zadatak B-1.2.

Na slici su prikazani pravilni peterokut $ABCDE$ i kvadrat $ABFG$. Odredite mjeru kuta FAD.



Rješenje.

Zbroj mjera unutrašnjih kutova pravilnog peterokuta iznosi $(5-2)180° = 540°$ pa je mjera unutrašnjeg kuta pravilnog peterokuta jednaka $\frac{540°}{5} = 108°$. — 1 bod

Budući da je trokut AED jednakokračan, $\sphericalangle DAE = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ — 2 boda

Kut $\sphericalangle BAF = 45°$ jer je to kut između dijagonale i stranice kvadrata. — 1 bod

Tada je $\sphericalangle FAD = \sphericalangle BAE - \sphericalangle BAF - \sphericalangle DAE = 108° - 45° - 36° = 27°$. — 2 boda

Zadatak B-1.3.

Tea je dobivenu novčanu nagradu odlučila podijeliti na četiri dijela. Jedan je dio namijenila za kupnju novog mobitela, drugi dio za obnovu odjeće, treći za ljetovanje, a četvrti za kupnju poklona prijateljici. Iznos predviđen za kupnju novog mobitela jednak je 26% ukupne novčane nagrade. Nadalje, dio namijenjen kupnji mobitela iznosi 80% dijela koji je Tea namijenila za obnovu odjeće, a jednak je i 65% dijela koji je namijenila za ljetovanje. Koliki postotak dobivene novčane nagrade Tea planira izdvojiti za kupnju poklona prijateljici?

Rješenje.

Označimo li iznos novčane nagrade s N, a s x, y, z i w redom iznose koje je Tea izdvojila za kupnju novog mobitela, obnovu odjeće, ljetovanje i kupnju poklona prijateljici, tada dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$x = 0.26N,$ 1 bod

$0.80y = 0.26N$ odakle slijedi da je $y = \frac{26}{80}N,$ 1 bod

$0.65z = 0.26N$ odakle dobivamo da je $z = \frac{26}{65}N.$ 1 bod

Kako je $w = N - x - y - z$ uvrštavanjem x, y, z iz prethodnih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} w &= N - \frac{26}{100}N - \frac{26}{80}N - \frac{26}{65}N \\ &= N - \frac{13}{50}N - \frac{13}{40}N - \frac{2}{5}N \\ &= \frac{3}{200}N \end{aligned}$$

2 boda

Dakle, 1.5% iznosa dobivene novčane nagrade Tea planira izdvojiti za kupnju poklona prijateljici. 1 bod

Zadatak B-1.4.

Odredite najmanji prirodni broj n za koji je broj $2565 \cdot n$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Rastavimo li broj 2565 na proste faktore dobivamo $2565 = 3^3 \cdot 5 \cdot 19$. 2 boda

Broj $2565 \cdot n$ je kvadrat nekog broja ako i samo ako se u rastavu tog broja na proste faktore svaki prosti faktor pojavljuje paran broj puta. Uočimo da se u dobivenom rastavu svaki prosti faktor pojavljuje neparan broj puta.

Prema tome najmanji prirodan broj koji pomnožen s brojem 2565 daje potpun kvadrat dobivamo tako da svaki od prostih faktora odaberemo točno jednom. 2 boda

Dakle, traženi broj n jednak je $n = 3 \cdot 5 \cdot 19 = 285$. 2 boda

Zadatak B-1.5.

Za vrijeme Francuske revolucije postojala je ideja da se dan (period od 24 sata) podijeli na 10 sati, sat na 100 minuta. Iako ova ideja nije zaživjela, u Markovoj školi ponekad koriste takav „decimalni sat“. Kad je Marko počeo rješavati zadatak na „decimalnom satu“ su bila točno 4.5 sata. Kad je završio zadatak „obični sat“ je pokazivao točno 11 h 15 min. Petra je isti zadatak započela rješavati točno u podne po „običnom vremenu“, a završila u 5.2 sati po „decimalnom“. Tko je od njih dvoje brže riješio zadatak i za koliko brže po „običnom vremenu“? (Napomena: vrijeme se kod oba sata mjeri od ponoći.)

Rješenje.

Kako 10 "decimalnih sati" odgovara vremenu od 24 "obična sata", zaključujemo da je 1 "decimalni sat" jednak 2.4 "obična sata". 1 bod

Dakle, Marko je počeo rješavati zadatak u $4.5 \cdot 2.4$ h $= 10.8$ h $= 10$ h 48 min po "običnom vremenu". 1 bod

Kako je Marko završio zadatak u 11 h 15 min, zaključujemo da je na rješavanje zadataka potrošio 27 minuta. 1 bod

Nadalje, podne po "običnom vremenu" odgovara vremenu od 5 "decimalnih sati", te stoga zaključujemo da je Petra završila zadatak nakon 0.2 "decimalna sata", tj. $0.2 \cdot 2.4 = 0.48$ h $= 28.8$ min po "običnom vremenu". 2 boda

Dakle, evidentno je da je Marko brže riješio zadatak za 1.8 min. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Zbroj razlomaka $\frac{12}{23} + \frac{1212}{2323} + \frac{121212}{232323} + \cdots + \frac{1212\ldots12}{2323\ldots23}$ iznosi 528. Broj znamenaka 1 i 2 u brojniku te broj znamenaka 2 i 3 u nazivniku tih razlomaka povećava se za jedan. Koliko puta se znamenka 2 pojavljuje u zadnjem razlomku?

Rješenje.

Počevši od drugog pribrojnika sve razlomke možemo skratiti na sljedeći način:

$$\frac{1212}{2323} = \frac{12 \cdot 100 + 12}{23 \cdot 100 + 23} = \frac{12 \cdot 101}{23 \cdot 101} = \frac{12}{23}$$ 2 boda

$$\frac{121212}{232323} = \frac{12 \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^2 + 12}{23 \cdot 10^4 + 23 \cdot 10^2 + 23} = \frac{12 \cdot 10101}{23 \cdot 10101} = \frac{12}{23}$$ 2 boda

$$\vdots$$

$$\frac{1212\ldots12}{2323\ldots23} = \frac{12 \cdot 101\ldots01}{23 \cdot 101\ldots01} = \frac{12}{23}$$ 2 boda

Ako broj pribrojnika u danom zbroju označimo s n tada vrijedi $n \cdot \frac{12}{23} = 528$, odakle dobivamo da je broj pribrojnika $n = 1012$. 2 boda

U prvom razlomku znamenka 2 pojavljuje se 2 puta, u drugom četiri, trećem šest, ... n-tom $2n$ puta.

Dakle, u posljednjem razlomku znamenka 2 pojavljuje se $2 \cdot 1012 = 2024$ puta. 2 boda

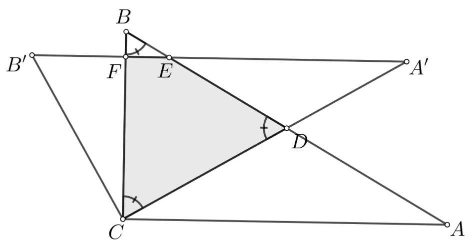
Napomena: Ako učenik bez ikakve argumentacije napiše da je svaki od razlomaka u danom zbroju jednak $\frac{12}{23}$, učeniku treba za taj dio zadatka dodijeliti 2 boda od previđenih 6.

Zadatak B-1.7.

U pravokutnom trokutu ABC pravi je kut u vrhu C, $|AB| = 8$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Trokut ABC se rotacijom oko vrha C za $30°$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata preslika u trokut $A'B'C$. Koliko iznosi površina zajedničkog dijela trokuta ABC i $A'B'C$?

Rješenje.

Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C, te neka je $\beta = \sphericalangle ABC = 60°$. Zarotiramo li trokut ABC oko vrha C za $30°$ u pozitivnom smjeru dobivamo trokut $A'B'C$ kao na sljedećoj skici.



Kut $\beta = 60°$, $\sphericalangle A'CB = 90° - 30° = 60°$ pa je trokut CDB jednakostraničan duljine stranice 4. 2 boda

Iz Pitagorina poučka dobivamo $|CA| = \sqrt{|AB|^2 - |CB|^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Kako je dužina $\overline{CF}$ visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta $CA'B'$ dobivamo da je $|CF| = \dfrac{|CA'| \cdot |CB'|}{|A'B'|} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4}{8} = 2\sqrt{3}$. 1 bod

Stoga je $|BF| = |BC| - |CF| = 4 - 2\sqrt{3}$. 1 bod

Kut $\sphericalangle BEF = 30°$ (jer je to kut između dužine $\overline{AB}$ i njenom rotacijom dobivene dužine $\overline{A'B'}$), a budući da je $\sphericalangle EBF = 60°$, trokut FEB je pola jednakostraničnog trokuta.

Stoga vrijedi $|BE| = 2 \cdot |BF| = 8 - 4\sqrt{3}$ i $|FE| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BE| = 4\sqrt{3} - 6$. 2 boda

Sada je $P_{FEB} = \frac{1}{2}|FE| \cdot |BF| = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - 6\right) \cdot \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 14\sqrt{3} - 24$. 1 bod

Nadalje, dobivamo da je površina trokuta CDB jednaka $P_{CDB} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Konačno, površina zajedničkog dijela trokuta ABC i $A'B'C$ iznosi
$P = P_{CDB} - P_{FEB} = 4\sqrt{3} - \left(14\sqrt{3} - 24\right) = 24 - 10\sqrt{3}$. 1 bod

Napomena: Učenik koji zarotira trokut u suprotnom smjeru treba dobiti isti rezultat i sve bodove.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite vrijednost izraza $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ ako su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2+3=6x$.

Prvo rješenje.

Za kvadratnu jednadžbu $2x^2-6x+3=0$ vrijede Vieteove formule, odnosno

$$x_1+x_2=3 \text{ i } x_1\cdot x_2=\frac{3}{2}.$$ 2 boda

Tada redom slijedi:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}$$ 1 bod

$$=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$ 2 boda

$$=\frac{3^2-2\cdot\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{6}{\frac{9}{4}}=\frac{8}{3}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2-6x+3=0$ su $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Tada redom slijedi

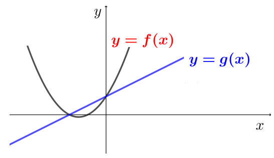
$$x_{1,2}^2=\frac{9\pm6\sqrt{3}+3}{4}=\frac{12\pm6\sqrt{3}}{4}=\frac{6\pm3\sqrt{3}}{2}$$ 2 boda

$$\frac{1}{x_{1,2}^2}=\frac{2}{6\pm3\sqrt{3}}\cdot\frac{6\mp3\sqrt{3}}{6\mp3\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(6\mp3\sqrt{3})}{36-27}=\frac{4\mp2\sqrt{3}}{3}$$ 2 boda

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}+\frac{4+2\sqrt{3}}{3}=\frac{8}{3}$$ 1 bod

Zadatak B-2.2.

Grafovi funkcija $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ i $g(x)=\frac{c}{4}x+2$ prikazani su na slici. Točke u kojima se grafovi sijeku nalaze se na koordinatnim osima. Odredite realne brojeve a i c.



Rješenje.

Neka je točka A presjek grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$ na osi ordinata i točka B presjek tih grafova na osi apscisa.

Tada iz $g(x)=\frac{c}{4}x+2$, uvrštavanjem $x=0$, slijedi $g(0)=2$ pa je točka $A(0,2)$. 1 bod

Uvrštavanjem koordinata točke A u $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ slijedi da je $c=2$. 1 bod

Tada je $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+2$ i $g(x)=\frac{1}{2}x+2$ pa iz $g(x)=0$, odnosno $\frac{1}{2}x+2=0$ slijedi da je $x=-4$. 2 boda

Tada je točka $B(-4,0)$, a kad njezine koordinate uvrstimo u $f(x)=ax^2+\frac{3}{2}x+2$ dobivamo

$$0=a\cdot(-4)^2+\frac{3}{2}\cdot(-4)+2$$ 1 bod

pa je $a=\frac{1}{4}$. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Riješite jednadžbu

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}=2024.$$

Rješenje.

Uočimo da su izrazi ispod oba korijena kvadrati binoma pa danu jednadžbu možemo zapisati kao

$$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=2024, \text{ odnosno}$$ 1 bod

$$|x+1|+|x-1|=2024.$$ 1 bod

Podijelit ćemo rješavanje ove jednadžbe po intervalima $x\leqslant -1$, $-1<x\leqslant 1$ i $x>1$. 1 bod

Za $x\leqslant -1$ rješavamo jednadžbu $-x-1-x+1=2024$. Njezino je rješenje $x=-1012$ i zadovoljava uvjet $x\leqslant -1$ pa je to i rješenje početne jednadžbe. 1 bod

Za $-1<x\leqslant 1$ rješavamo jednadžbu $x+1-x+1=2024$. Ova jednadžba nema rješenja. 1 bod

Za $x>1$ rješavamo jednadžbu $x+1+x-1=2024$. Njezino je rješenje $x=1012$ i zadovoljava uvjet $x>1$ pa je to i rješenje početne jednadžbe. 1 bod

Dakle, sva rješenja polazne jednadžbe su -1012 i 1012.

Zadatak B-2.4.

Na nekom natjecanju iz matematike rješava se n zadataka, $10 < n < 20$. Za svaki točno riješeni zadatak natjecatelj dobiva 5 bodova, a za svaki neriješeni ili netočno riješen zadatak gubi 3 boda. Ako je Sebastijan imao ukupno 0 bodova, koliko je zadataka riješio točno? Koliko je bilo ukupno zadataka?

Prvo rješenje.

Neka je x broj točno riješenih zadataka, a y broj netočno ili neriješenih zadataka.

Tada je $10 < x + y < 20$, $x, y \in \mathbb{N}$.

Ukupni broj bodova iznosi $5x - 3y$. 1 bod

Budući da Sebastijan ima 0 bodova, vrijedi

$$5x - 3y = 0, \text{ odnosno } x = \frac{3y}{5}.$$ 1 bod

Kako x mora biti prirodan broj, slijedi da y mora biti djeljiv s 5. 1 bod

Uvrstimo u $10 < x + y < 20$ da je $x = \frac{3y}{5}$.

Tada je $10 < \frac{8y}{5} < 20$, odnosno $6.25 < y < 12.5$. 1 bod

Kako je y prirodan broj djeljiv s 5, jedina je mogućnost $y = 10$. 1 bod

Tada je $x = \frac{3y}{5} = 6$, a ukupno je bilo 16 zadataka. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x broj točno riješenih zadataka, a y broj netočno ili neriješenih zadataka.

Vrijedi da je $10 < x + y < 20$, $x, y \in \mathbb{N}$, a tada je $x < 20$ i $y < 20$.

Ukupni broj bodova iznosi $5x - 3y$. 1 bod

Budući da Sebastijan ima 0 bodova, vrijedi

$$5x - 3y = 0, \text{ odnosno } x = \frac{3y}{5}.$$ 1 bod

Kako x mora biti prirodan broj, slijedi da y mora biti djeljiv s 5. 1 bod

Tada, budući da je $y < 20$, imamo sljedeće mogućnosti:

$y = 5$ i $x = \dfrac{3y}{5} = 3$, ali je tada $x + y = 8$ pa to nije rješenje;

$y = 10$ i $x = 6$;

$y = 15$ i $x = \dfrac{3y}{5} = 9$, ali je tada $x + y = 24$ što također ne može biti rješenje. 2 boda

Sebastijan je točno riješio 6 zadataka, a ukupno je bilo 16 zadataka. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne raspiše sve mogućnosti, odnosno ne pokaže da je $x = 10$, $y = 6$ jedino rješenje, može dobiti maksimalno 3 boda.

Analogno vrijedi i ukoliko učenik izrazi $y = \frac{5}{3}x$ te raspisuje sve slučajeve za $x < 20$.

Zadatak B-2.5.

Ana ide u posjet baki i želi joj odnijeti nekoliko komada voća u košarici. Na raspolaganju ima 6 banana, 5 jabuka i 4 breskve.

a) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako košarica ne smije biti prazna?

b) Na koliko načina može odabrati voće za košaricu ako od svake vrste voća mora biti barem jedan komad?

(Napomena: nije važan raspored voća, već samo koje je voće u košarici i koliko komada toga voća.)

Rješenje.

a) Ana može odabrati:

- nula, jednu, dvije, tri, četiri, pet ili šest banana, što je 7 mogućnosti,
- nula, jednu, dvije, tri, četiri ili pet jabuka, što je 6 mogućnosti,
- nula, jednu, dvije, tri ili četiri breskvi, što je 5 mogućnosti. 2 boda

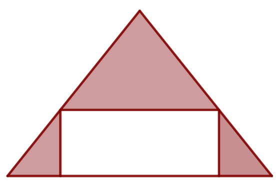
Dakle, ukupno ima $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ mogućnosti odabira broja komada voća. 1 bod

Kako smo takvim prebrojavanjem uzeli u obzir mogućnost da ima 0 komada voća od svake vrste, potrebno je oduzeti tu mogućnost, pa je traženi broj načina jednak 209. 1 bod

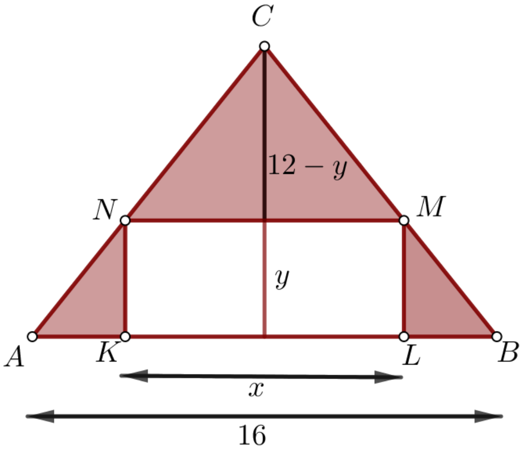
b) Ako u košarici mora biti jedan komad voća od svake vrste broj mogućnosti je $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. 2 boda

Zadatak B-2.6.

U jednakokračni trokut, duljine osnovice 16 cm i visine na osnovicu duljine 12 cm upisan je pravokutnik kojemu su dva vrha na osnovici, a preostala dva vrha na krakovima zadanog trokuta. Odredite duljine stranica upisanog pravokutnika tako da osjenčana površina bude minimalna. Koliko iznosi ta minimalna površina?



Rješenje.



Neka su duljine stranice upisanoga pravokutnika x i y, kao na slici. Osjenčanu površinu računamo kao razliku površine trokuta ABC i pravokutnika $KLMN$:

$$P = P_{\triangle ABC} - P_{\square KLMN} = \frac{16 \cdot 12}{2} - xy = 96 - xy.$$ 1 bod

Izrazimo funkciju površine u jednoj varijabli. U tu svrhu povezat ćemo veličine x i y koristeći sličnost između trokuta ABC i NMC. 1 bod

Iz sličnosti tih trokuta slijedi $16 : x = 12 : (12 - y)$, odnosno $16(12 - y) = 12x$. 1 bod

Slijedi

$$y = 12 - \frac{3}{4}x.$$ 1 bod

Tada je $P = 96 - xy = 96 - x(12 - \frac{3}{4}x) = 96 - 12x + \frac{3}{4}x^2$.

Dakle, površina je kvadratna funkcija

$$P(x) = \frac{3}{4}x^2 - 12x + 96.$$ 2 boda

Kvadratna funkcija poprima minimum za

$$x = x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-\frac{3}{2}} = 8 \text{ cm}.$$ 2 boda

Tada je $y = 12 - \frac{3}{4}x = 12 - \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ cm. 1 bod

Stranice pravokutnika su 8 cm i 6 cm, a minimalna osjenčana površina jest

$$P = 96 - 48 = 48 \text{ cm}^2.$$ 1 bod

Napomena: Učenik može dobiti i kvadratnu funkciju po y ako izrazi $x = 16 - \frac{4}{3}y$. Tada je

$$P(y) = \frac{4}{3}y^2 - 16y + 96 \text{ i } y = y_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{-\frac{8}{3}} = 6.$$

Također učenik može tražiti maksimalnu vrijednost površine pravokutnika (48 cm^2) jer je osjenčana površina minimalna kad je površina pravokutnika maksimalna.

Zadatak B-2.7.

Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 4} + \sqrt[3]{x^2 - 4} + \sqrt[3]{x^2 - 4x + 4}}.$$

Koliko je $f(4) + f(8) + f(12) + \cdots + f(2024)$?

Rješenje.

Uočimo da se izraz na desnoj strani može zapisati kao

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)(x-2)}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}. \qquad \text{1 bod}$$

Također, uočimo da je nazivnik oblika a^2+ab+b^2, gdje je $a=\sqrt[3]{x+2}$, $b=\sqrt[3]{x-2}$ pa ćemo množenjem brojnika i nazivnika s $a-b=\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}$ racionalizirati nazivnik danog razlomka. Tada je redom

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)(x-2)}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}}= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{2(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})}{\sqrt[3]{(x+2)^3}-\sqrt[3]{(x-2)^3}}= \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{2(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})}{(x+2)-(x-2)}=\frac{2(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2})}{4}=\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-2}}{2}. \qquad \text{2 boda}$$

Slijedi

$$f(4)+f(8)+f(12)+\cdots+f(2024)=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{10}+\cdots+\sqrt[3]{2026}-\sqrt[3]{2022})= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2026}-\sqrt[3]{2}). \qquad \text{2 boda}$$

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Riješite jednadžbu $5 \cdot 0.16^x + 8 \cdot 0.4^x = 4$.

Rješenje.

Neka je $t = (0.4)^x$. 1 bod

Nakon uvođenja supstitucije jednadžba poprima oblik $5t^2 + 8t - 4 = 0$. 1 bod

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su:

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{10} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{-8 \pm 12}{10},$$

odnosno vrijedi $t_1 = \frac{2}{5}$ i $t_2 = -2$. 2 boda

Preostaje odrediti vrijednosti nepoznanice x.

Iz jednadžbe $0.4^x = \frac{2}{5}$ dobiva se $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$ i rješenje je $x = 1$. 1 bod

Ne postoji realan broj x za koji je $0.4^x = -2$. 1 bod

Rješenje $x = 1$ jedino je rješenje početne jednadžbe.

Zadatak B-3.2.

Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $\frac{\log a}{3} = \frac{\log b}{2}$ i $\log(ab) = 5$. Koliko je $\sqrt[3]{a} + b^{\frac{1}{2}}$?

Prvo rješenje.

Najprije početnu jednakost zapišemo u drugome obliku:

$$\frac{\log a}{3} = \frac{\log b}{2} / \cdot 6$$

$$2\log a = 3\log b$$

$2\log a - 3\log b = 0$. 1 bod

Primjenom svojstva logaritma preoblikujemo i drugu jednakost:

$\log(ab) = \log a + \log b = 5$. 1 bod

Dobivamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{cases} 2\log a - 3\log b = 0 \\ \log a + \log b = 5 \end{cases}$$

čijim rješavanjem slijedi da je $\log a = 3$ i $\log b = 2$. 2 boda

Dakle, vrijedi da je $a = 10^3 = 1000$, a $b = 10^2 = 100$. 1 bod

Konačno je $\sqrt[3]{a} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{1000} + 100^{\frac{1}{2}} = 10 + 10 = 20$. 1 bod

Drugo rješenje.

Iz jednakosti $\dfrac{\log a}{3} = \dfrac{\log b}{2}$ slijedi $2\log a = 3\log b$, odnosno vrijedi $\log a^2 = \log b^3$ pa je $a^2 = b^3$. 1 bod

Iz jednakosti $\log(ab) = 5$ slijedi da je $ab = 10^5$. 1 bod

Posljednju jednakost kvadrirajmo i primijenimo da je $a^2 = b^3$. Slijedi redom:

$$a^2b^2 = 10^{10},$$ 1 bod

$$b^5 = 10^{10},$$

$$b = 10^2 = 100.$$ 1 bod

Tada je $a = \dfrac{10^5}{b} = 10^3 = 1000$. 1 bod

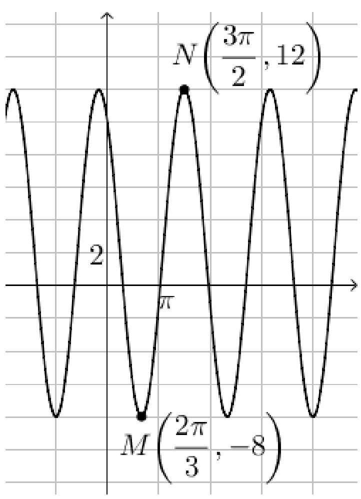
Konačno je $\sqrt[3]{a} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{1000} + 100^{\frac{1}{2}} = 10 + 10 = 20$. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Zadana je funkcija $f(x) = A\sin\left(Bx + \dfrac{7\pi}{10}\right) + D$, pri čemu su A, B i D pozitivni realni brojevi. Točka $M\left(\dfrac{2\pi}{3},\ -8\right)$ je jedina točka minimuma, a točka $N\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 12\right)$ jedina točka maksimuma funkcije f u intervalu $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Odredite $f\left(\dfrac{203\pi}{12}\right)$.

Rješenje.

Prikažimo točke M i N u koordinatnome sustavu te skicirajmo graf funkcije f.



Odredimo najprije koeficijente A i D.

Koeficijent D je vertikalni pomak funkcije sinus ili računski:

$$D = \frac{\text{"maksimalna vrijednost"} + \text{"minimalna vrijednost"}}{2} = \frac{12 + (-8)}{2} = 2.$$ 1 bod

Koeficijent A je amplituda dane funkcije ili računski

$$A = \frac{\text{"maksimalna vrijednost"} - \text{"minimalna vrijednost"}}{2} = \frac{12 - (-8)}{2} = 10.$$ 1 bod

Za temeljni period T funkcije f vrijedi $\frac{T}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, odnosno $T = \frac{5\pi}{3}$. 1 bod

Sada možemo odrediti koeficijent B: $B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}$. 1 bod

Prema tome, zadana funkcija glasi $f(x) = 10 \sin\left(\frac{6}{5}x + \frac{7\pi}{10}\right) + 2$.

Konačno preostaje odrediti $f\left(\frac{203\pi}{12}\right)$.

$f\left(\frac{203\pi}{12}\right) = 10 \sin\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{203\pi}{12} + \frac{7\pi}{10}\right) = 10 \sin(21\pi) + 2 = 10 \cdot 0 + 2 = 2.$ 2 boda

Napomena: Učenik može ostvariti sve bodove u zadatku i ako nije skicirao graf funkcije. Učenik može ostvariti bodove za točno određene koeficijente A i D ako ih je očitao sa skice.

Zadatak B-3.4.

Odredite sve realne brojeve t za koje je jedno rješenje jednadžbe $x^2 + 2024 = tx$ prost broj, a drugo složen prirodni broj.

Rješenje.

Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku $x^2 - tx + 2024 = 0$.

Za rješenja jednadžbe vrijedi: $x_1 + x_2 = t$ i $x_1 \cdot x_2 = 2024$. 1 bod

Budući su x_1 i x_2 prirodni brojevi, oni moraju biti djelitelji broja 2024. 1 bod

Rastavimo broj 2024 na proste faktore: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. 1 bod

Broj 2024 može se napisati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva, pri čemu je točno jedan od njih prost, na tri različita načina: prosti faktor može biti broj 2, 11 ili 23.

1. mogućnost: $2024 = 2 \cdot 1012$

Tada je $t = 2 + 1012 = 1014$. 1 bod

2. mogućnost: $2024 = 11 \cdot 184$

Tada je $t = 11 + 184 = 195$. 1 bod

3. mogućnost: $2024 = 23 \cdot 88$

Tada je $t = 23 + 88 = 111$. 1 bod

Za realni broj t vrijedi $t \in \{111,\ 195,\ 1014\}$.

Zadatak B-3.5.

Prikazan je zapis pisanoga zbrajanja četiriju troznamenkastih brojeva sa znamenkama a i b. O kojim se troznamenkastim brojevima radi?

$$\begin{array}{cccc} & a & a & a \\ & a & a & b \\ & a & b & b \\ + & b & b & b \\ \hline 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

Prvo rješenje.

Uočimo da za broj $\overline{aaa}$ vrijedi $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$.

Analogno se dobiva $\overline{aab} = 110a + b$, $\overline{abb} = 100a + 11b$ i $\overline{bbb} = 111b$. 1 bod

Prema tome, iz $\overline{aaa} + \overline{aab} + \overline{abb} + \overline{bbb} = 1503$ slijedi:

$111a + 110a + b + 100a + 11b + 111b = 1503$

$321a + 123b = 1503/ : 3$

$107a + 41b = 501$

$b = \dfrac{501 - 107a}{41}$ 1 bod

Kako su a i b znamenke, mora vrijediti $1 \leqslant \dfrac{501 - 107a}{41} \leqslant 9$, odnosno $\dfrac{132}{107} \leqslant a \leqslant \dfrac{460}{107}$.

Prema tome, mora vrijediti $a \in \{2,\ 3,\ 4\}$. 1 bod

1. mogućnost: $a = 2$

Tada je $b = \dfrac{501 - 214}{41} = \dfrac{287}{41} = 7$.

2. mogućnost: $a = 3$

Tada je $b = \dfrac{501 - 321}{41} = \dfrac{180}{41}$, što nije prirodan broj.

3. mogućnost: $a = 4$

Tada je $b = \dfrac{501 - 428}{41} = \dfrac{73}{41}$, što nije prirodan broj.

Jednakost vrijedi samo kad je $a = 2$ i $b = 7$. 2 boda

Traženi troznamenkasti brojevi su 222, 227, 277 i 777. 1 bod

Drugo rješenje.

Iz zadnjega stupca u zapisu pisanoga zbrajanja možemo zaključiti da vrijedi $a + 3b \in \{13,\ 23,\ 33\}$ jer su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $1 \leqslant a \leqslant 9$ i $1 \leqslant b \leqslant 9$ pa mora biti $4 \leqslant a + 3b \leqslant 36$. 1 bod

Iz prvoga stupca u zapisu pisanoga zbrajanja možemo zaključiti da znamenka a mora biti manja od 5 jer bi inače zbroj zadana četiri troznamenkasta broja iznosio više od 1503. Prema tome, mora vrijediti $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. 1 bod

1. mogućnost: $a = 1$

Iz $1 + 3b \in \{13,\ 23,\ 33\}$ slijedi $3b \in \{12,\ 22,\ 32\}$, što je moguće jedino za $b = 4$. No, budući je $111 + 114 + 144 + 444 = 813 \neq 1503$, zaključujemo $a \neq 1$. 1 bod

2. mogućnost: $a = 2$

Iz $2 + 3b \in \{13,\ 23,\ 33\}$ slijedi $3b \in \{11,\ 21,\ 31\}$, što je moguće jedino za $b = 7$. Budući je $222 + 227 + 277 + 777 = 1503$, zaključujemo da znamenke $a = 2$ i $b = 7$ zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 bod

3. mogućnost: $a = 3$

Iz $3 + 3b \in \{13,\ 23,\ 33\}$ slijedi $3b \in \{10,\ 20,\ 30\}$, što nije moguće niti za jedan b (jer mora vrijediti $b < 10$). 1 bod

4. mogućnost: $a = 4$

Iz $4 + 3b \in \{13,\ 23,\ 33\}$ slijedi $3b \in \{9,\ 19,\ 29\}$, što je moguće jedino za $b = 3$. No, budući je $444 + 443 + 433 + 333 = 1653 \neq 1503$, zaključujemo $a \neq 4$. 1 bod

Traženi troznamenkasti brojevi su 222, 227, 277 i 777.

Treće rješenje.

Zbrajanjem znamenki na mjestu jedinica dobiva se $a+3b = \overline{x3}$, pri čemu je $x \in \{1,\ 2,\ 3\}$ jer su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $1 \leqslant a \leqslant 9$ i $1 \leqslant b \leqslant 9$ pa mora biti $4 \leqslant a + 3b \leqslant 36$. 1 bod

Zbrajanjem znamenki na mjestu desetica dobiva se $2a + 2b + x = \overline{y0}$ iz čega slijedi da je x paran broj.

Zaključujemo da mora vrijediti $x = 2$, odnosno $a + 3b = 23$. 1 bod

Iz uvjeta $1 \leqslant a \leqslant 9$ zaključujemo da mora vrijediti $1 \leqslant 23 - 3b \leqslant 9$, odnosno $\frac{14}{3} \leqslant b \leqslant \frac{22}{3}$. Prema tome, mora vrijediti $b \in \{5,\ 6,\ 7\}$. 1 bod

1. mogućnost: $b = 5$

Tada je $a = 23 - 15 = 8$. No, budući je $888 + 885 + 855 + 555 = 3183 \neq 1503$, zaključujemo $b \neq 5$. 1 bod

2. mogućnost: $b = 6$

Tada je $a = 23 - 18 = 5$. No, budući je $555 + 556 + 566 + 666 = 2343 \neq 1503$, zaključujemo $b \neq 6$. 1 bod

3. mogućnost: $b = 7$

Tada je $a = 23 - 21 = 2$. Budući je $222 + 227 + 277 + 777 = 1503$, zaključujemo da su traženi troznamenkasti brojevi 222, 227, 277 i 777. 1 bod

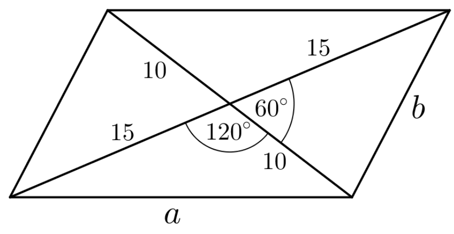
Napomena: Ako učenik odredi tražene brojeve bez obrazloženja dobiva 1 bod.

Zadatak B-3.6.

Paralelogram s dijagonalama duljina 20 cm i 30 cm koje se sijeku pod kutom mjere 60° baza je uspravne prizme obujma $1500\sqrt{3}$ cm^3. Koliko je oplošje te prizme?

Rješenje.

Skicirajmo najprije paralelogram (bazu prizme) i označimo zadane elemente.



Izračunajmo površinu B paralelograma primjenom formule za površinu četverokuta kojemu su zadane duljine dijagonala e i f te mjera kuta φ između njih.

$B = \frac{1}{2}ef\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 30\cdot \sin 60^\circ$ 1 bod

Budući je $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, površina paralelograma iznosi $B = 300\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. 1 bod

Iz formule za obujam (volumen) prizme $V = B\cdot h$ možemo odrediti njezinu visinu h:

$h = \frac{V}{B} = \frac{1500\sqrt{3}}{150\sqrt{3}} = 10$ cm. 1 bod

Za određivanje oplošja prizme potrebno je odrediti duljine njezinih osnovnih bridova, to jest, duljine stranica zadanoga paralelograma.

Sjecište dijagonala paralelograma dijeli obje dijagonale na dva dijela jednakih duljina pa duljine stranica paralelograma možemo izračunati primjenom poučka o kosinusu.

$a^2 = 15^2 + 10^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\cos 120^\circ = 225 + 100 + 150 = 475$

$a = \sqrt{475} = 5\sqrt{19}$ cm 2 boda

$b^2 = 15^2 + 10^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\cos 60^\circ = 225 + 100 - 150 = 175$

$b = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$ cm 2 boda

Preostaje još izračunati oplošje prizme.

$O = 2B + P = 2B + 2ah + 2bh$ 1 bod

$O = 2\cdot 150\sqrt{3} + 2\cdot 5\sqrt{19}\cdot 10 + 2\cdot 5\sqrt{7}\cdot 10 = \left(300\sqrt{3} + 100\sqrt{19} + 100\sqrt{7}\right)\ \mathrm{cm}^2$ 2 boda

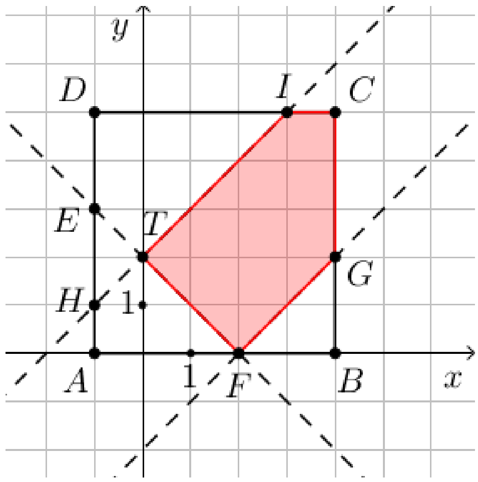
Napomena: Učenik može ostvariti sve bodove u zadatku i bez djelomičnoga korjenovanja duljina stranica paralelograma.

Zadatak B-3.7.

Iz skupa $S = \{(x,\ y)\ :\ x, y\in\mathbb{R},\ -1\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 5\}$ na slučajan se način bira uređeni par $(x,\ y)$. Kolika je vjerojatnost da za članove x i y toga uređenog para vrijedi $x + y > 2$ i $|x - y| < 2$?

Rješenje.

Zadatak rješavamo uz pomoć grafičkoga prikaza predstavljajući uređene parove $(x,\ y)$ kao točke u koordinatnom sustavu.



Prostor elementarnih događaja jest skup

$$S = \{(x,\ y)\ :\ x, y \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 5\}$$

na slici prikazan kao kvadrat $ABCD$. Njegova površina iznosi $5 \cdot 5 = 25$ kv.jed. 1 bod

Točke $E(-1, 3)$ i $F(2, 0)$ sa slike su točke presjeka pravca $x + y = 2$ s pravcima $x = -1$ i $y = 0$. Sve točke (x, y) unutar kvadrata koje su iznad pravca EF zadovoljavaju uvjet $x + y > 2$. 2 boda

Iz uvjeta $|x - y| < 2$ slijedi da je $-2 < x - y < 2$, a sve točke (x, y) za koje taj uvjet vrijedi nalaze se između pravaca $x - y = -2$ i $x - y = 2$. 2 boda

Sjecišta tih pravaca s pravcima na kojima leže stranice kvadrata ($x = -1$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 5$) su točke $F(2, 0)$, $G(4, 2)$, $I(3, 5)$ i $H(-1, 1)$. Točka $T(0, 2)$ je točka presjeka pravca $x + y = 2$ i $x - y = -2$.

Skup svih točaka kvadrata $ABCD$ koje zadovoljavaju oba uvjeta iz zadatka na slici je prikazan kao mnogokut $FGCIT$. 2 boda

Izračunajmo površinu mnogokuta $FGCIT$ kao zbroj površina trokuta FGT i trapeza $TGCI$.

$P(FGCIT) = P(FGT) + P(TGCI) = \dfrac{4 \cdot 2}{2} + \dfrac{4 + 1}{2} \cdot 3 = 4 + 7.5 = 11.5$ kv.jed. 2 boda

Konačno, tražena vjerojatnost iznosi:

$p = \dfrac{P(FGCIT)}{P(ABCD)} = \dfrac{11.5}{25} = \dfrac{23}{50} = 0.46.$ 1 bod

Napomena: Učenik može ostvariti sve bodove u zadatku neovisno o načinu određivanja tražene površine (uključujući i brojenje kvadratića). Učenik ne mora ispisivati koordinate točaka presjeka i postupak crtanja pravaca ili rješavanja sustava jednadžbi ako je jasno na slici označio te pravce i točke koje određuju mnogokut $FGCIT$. Ako je napravio takvu potpunu skicu, izračunao iz nje površinu i traženu vjerojatnost dodijeliti sve bodove. Ako učenik ima potpunu skicu s označenim mnogokutom, ali nije izračunao površinu i vjerojatnost, dodijeliti 5 bodova.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\frac{(n+2)!-(n+1)!-n!}{n!}=2024.$$

Rješenje.

Zapišimo sve faktorijele u brojniku danog izraza koristeći $n!$:

$$\frac{(n+2)(n+1)n!-(n+1)n!-n!}{n!}=2024.$$ 2 boda

Sada brojnik i nazivnik danog razlomka možemo podijeliti s $n!$. Slijedi:

$$(n+2)(n+1)-(n+1)-1=2024,$$

a nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2+2n-2024=0$. 2 boda

Njezina su rješenja -46 i 44. Budući da se radi o faktorijelima, broj n mora biti prirodni broj te je jedino moguće rješenje $n=44$. 2 boda

Zadatak B-4.2.

Odredite sve realne brojeve x za koje su brojevi $\log(\sin x)$, $\log(\sin x+1)$ i $\log(3\sin x+1)$, tim redom uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rješenje.

Budući da je logaritam definiran samo za pozitivne realne brojeve, uvjet da zadatak ima rješenje je $\sin x>0$. 1 bod

Dani su brojevi uzastopni članovi aritmetičkog niza pa su traženi brojevi x rješenja jednadžbe:

$$\log(3\sin x+1)+\log(\sin x)=2\log(\sin x+1).$$ 1 bod

Tada je:

$$\log\left[(3\sin x+1)\sin x\right]=\log(\sin x+1)^2,$$ 1 bod

odnosno

$$(3\sin x+1)\sin x=(\sin x+1)^2.$$ 1 bod

Slijedi kvadratna jednadžba po $\sin x$:

$$2\sin^2 x-\sin x-1=0.$$

Tada je $\sin x = -0.5$ ili $\sin x = 1$. 1 bod

Rješenje $\sin x = -0.5$ odbacujemo zbog uvjeta zadataka, a iz rješenja $\sin x = 1$ slijedi da su traženi realni brojevi oblika:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$ 1 bod

Napomena: Ne treba oduzimati bodove ako učenik nije naveo uvjet, ali je odbacio mogućnost da je $\sin x = -0.5$ i dobio točno rješenje.

Zadatak B-4.3.

Vrhovi četverokuta su točke u kompleksnoj ravnini pridružene rješenjima jednadžbe

$$(z^2+1)(z^2+z+1) = 0$$

u skupu $\mathbb{C}$. Odredite koordinate vrhova i površinu danog četverokuta.

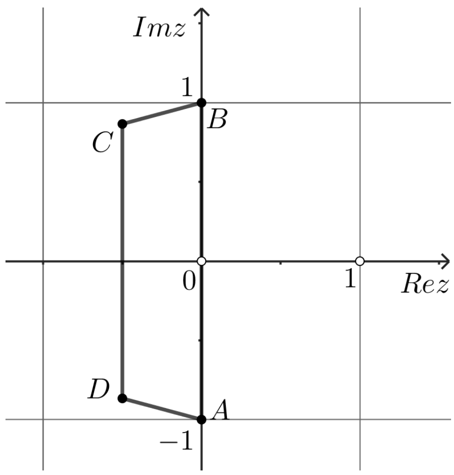
Rješenje.

Tražena rješenja dobivamo rješavanjem jednadžbi $z^2+1=0$ i $z^2+z+1=0$. 1 bod

Rješenja prve jednadžbe su $z_1 = i$, $z_2 = -i$. 1 bod

Rješenja druge jednadžbe su $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Vrhovi četverokuta su točke $A(0,-1)$, $B(0,1)$, $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. 2 boda



Površina dobivenog trapeza jest $P = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ kvadratnih jedinica. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Odredite sve realne brojeve k za koje kružnice zadane jednadžbama $(x+1)^2 + y^2 = 9$ i $(x-k)^2 + (y-2k)^2 = 4$ imaju samo jednu zajedničku točku.

Prvo rješenje.

Označimo središte i polumjer prve kružnice $S_1(-1,0)$, $r_1=3$, a druge $S_2(k,2k)$, $r_2=2$.

Kružnice će imati jednu točku zajedničku ako se dodiruju izvana ili iznutra. Ako se kružnice dodiruju izvana vrijedi da je $|S_1S_2| = r_1 + r_2 = 5$. 1 bod

Tada je $(k+1)^2 + 4k^2 = 25$, odnosno $5k^2 + 2k - 24 = 0$. 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{12}{5}$. 1 bod

Ako se kružnice dodiruju iznutra vrijedi da je $|S_1S_2| = |r_1 - r_2| = 1$. 1 bod

Tada je $(k+1)^2 + 4k^2 = 1$, odnosno $5k^2 + 2k = 0$. 1 bod

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $k_3 = 0$, $k_4 = -\frac{2}{5}$. 1 bod

Konačno, traženi brojevi k su $-\frac{12}{5}$, $-\frac{2}{5}$, 0 i 2.

Drugo rješenje.

Kružnice imaju samo jednu zajedničku točku ako sustav

$$\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 9,\\ (x-k)^2 + (y-2k)^2 = 4\end{cases} \qquad (\star)$$

ima jedinstveno realno rješenje. 1 bod

Oduzimanjem donje jednadžbe od gornje dobivamo izraz

$$2x\,(1+k) + 4ky - 5k^2 - 4 = 0.$$

Slijedi

$$ky = \frac{5k^2+4}{4} - \frac{k+1}{2}x,$$

što se svodi na slučajeve $k=0$ i $k \neq 0$.

Ako je $k=0$ tada je $0 = 1 - \frac{1}{2}x$, odnosno sustav $(\star)$ ima jedinstveno rješenje $x=2$, $y=0$ te je $k=0$ jedno od rješenja zadanog problema. 1 bod

Ako je $k \neq 0$ tada je

$$y = \frac{5k^2+4}{4k} - \frac{k+1}{2k}x$$

pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo:

$$x^2 + 2x + 1 + \left(\frac{5k^2+4}{4k} - \frac{k+1}{2k}x\right)^2 = 9,$$ 1 bod

što nakon kvadriranja i sređivanja prelazi u jednadžbu:

$$\left(1 + \frac{k^2+2k+1}{4k^2}\right)x^2 + \left(2 - \frac{5k^3+5k^2+4k+4}{4k^2}\right)x + \frac{25k^4+40k^2+16}{16k^2} - 8 = 0,$$

odnosno

$$\left(5k^2+2k+1\right)x^2 + \left(-5k^3+3k^2-4k-4\right)x + \frac{25k^4-88k^2+16}{4} = 0.$$

Prema uvjetu zadatka ova kvadratna jednadžba mora imati jedno realno rješenje, odnosno njena diskriminanta jednaka je 0. Slijedi:

$$\left(-5k^3+3k^2-4(k+1)\right)^2-4\left(5k^2+2k+1\right)\cdot\frac{25k^4-88k^2+16}{4}=0.$$ 1 bod

Sređivanjem ovaj izraz prelazi u $4k^3\left(25k^3+20k^2-116k-48\right)=0$.

Kako je $k\neq 0$ ova je jednadžba ekvivalentna jednadžbi $25k^3+20k^2-116k-48=0$, pa redom slijedi:

$$\begin{aligned}25k^3-50k^2+70k^2-140k+24k-48&=0,\\ 25k^2(k-2)+70k(k-2)+24(k-2)&=0,\\ (k-2)\left(25k^2+70k+24\right)&=0.\end{aligned}$$ 1 bod

Rješenja ove jednadžbe su $k_1=2$, $k_2=-\frac{12}{5}$ i $k_3=-\frac{2}{5}$.

Konačno, traženi brojevi k su $-\frac{12}{5}$, $-\frac{2}{5}$, 0 i 2. 1 bod

Napomena: Ako učenik skicom u koordinatnom sustavu s prikazom jedne kružnice i druge čije je središte na pravcu $y=2x$ pogodi i pokaže da se kružnice dodiruju za slučaj $k=0$ (vidljivo je iz te slike), za to rješenje treba dobiti 1 bod.

Zadatak B-4.5.

Profesor matematike dao je učenicima za domaću zadaću deset zadataka i rekao da će među njima odabrati dva zadataka za sljedeći test. Koliko najmanje zadataka Luka treba riješiti od zadanih deset da bi s vjerojatnošću većom od $\frac{7}{9}$ bio siguran da će se među odabranim zadacima pojaviti barem jedan zadatak od onih koje je riješio?

Prvo rješenje.

Neka je S skup od deset zadataka za domaću zadaću. Neka je L podskup skupa S, odnosno skup od x zadataka koje je Luka riješio. Onda je $10-x$ broj zadataka koje Luka nije riješio.

Promotrimo događaj A - "profesor je odabrao barem jedan zadatak iz skupa L".

Tada je suprotni događaj $\overline{A}$ - "profesor nije odabrao niti jedan zadatak iz skupa L" ili $\overline{A}$ - "profesor je odabrao oba zadatka iz skupa $S\setminus L$. 1 bod

Vjerojatnost događaja A jest

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{\binom{10-x}{2}}{\binom{10}{2}}=1-\frac{(10-x)(10-x-1)}{10\cdot 9}.$$ 2 boda

Kako je $p(A)>\frac{7}{9}$, slijedi redom

$$\begin{aligned}1-\frac{(10-x)(10-x-1)}{10\cdot 9}&>\frac{7}{9},\\ 90-\left(100-10x-10-10x+x^2+x\right)&>70,\\ -x^2+19x-70&>0.\end{aligned}$$ 1 bod

Rješenje ove nejednadžbe je interval $\langle 5,14\rangle$, 1 bod

pa je traženi najmanji broj zadataka koje Luka mora riješiti jednak 6. 1 bod

Napomena: Učeniku koji ne opiše tekstom analizirane događaje, a točno riješi zadatak ne oduzimati 1 bod.

Drugo rješenje.

Učenik može vjerojatnost računati i kao vjerojatnost unije događaja $A \cup B$, gdje je

A - "profesor treba odabrati točno jedan zadatak iz skupa L",

B - "profesor treba odabrati točno 2 zadatka iz skupa L". 1 bod

Tada je redom

$$p(A \cup B) = \frac{\binom{10-x}{1}\binom{x}{1} + \binom{10-x}{0}\binom{x}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{(10-x)x + \frac{1}{2}x(x-1)}{45} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{2}x}{45}.$$ 2 boda

Kako je $p(A) > \frac{7}{9}$, slijedi redom

$$\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{2}x}{45} > \frac{7}{9},$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{2}x > 35,$$

$$x^2 - 19x + 70 < 0.$$ 1 bod

Rješenje ove nejednadžbe je interval $\langle 5, 14 \rangle$, 1 bod

pa je traženi najmanji broj zadataka koje Luka mora riješiti jednak 6. 1 bod

Napomena: Učeniku koji ne opiše tekstom analizirane događaje, a točno riješi zadatak ne oduzimati 1 bod.

Ako učenik umjesto rješavanja kvadratne nejednadžbe redom računa vjerojatnosti za $x = 10, 9, 8, 7, 6, 5$, odnosno sve dok vjerojatnost ne postane manja ili jednaka $\frac{7}{9}$ i napiše točan zaključak priznati sve bodove.

Zadatak B-4.6.

Neka je n prirodni broj. U razvoju binoma $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ omjer binomnih koeficijenata petog i šestog člana je $1 : 404$. Koliko članova u tomu razvoju sadrži potenciju broja x kojoj je eksponent prirodan broj?

Rješenje.

Binomni koeficijenti 5. člana i 6. člana u razvoju su redom $\binom{n}{4}$ i $\binom{n}{5}$, pa prema uvjetu zadatka vrijedi

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{5}} = \frac{1}{404}.$$ 1 bod

Nakon raspisivanja binomnih koeficijenata slijedi

$$\frac{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{404},$$ 1 bod

a nakon skraćivanja dobivamo

$$\frac{5}{n-4}=\frac{1}{404},$$

odnosno $n-4=2020$ pa je $n=2024$. 1 bod

Tada je u razvoju binoma $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2024}$ opći član jednak

$$\binom{2024}{k}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{2024-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=\binom{2024}{k}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{2024-k}\cdot(-1)^k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}= \quad \text{1 bod}$$

$$\binom{2024}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{2024-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{3}}= \quad \text{1 bod}$$

$$\binom{2024}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{6072-5k}{6}}. \quad \text{1 bod}$$

Uočimo da svaki član danog razvoja sadrži potenciju $x^{\frac{6072-5k}{6}}$. Eksponent te potencije prema uvjetu zadatka mora biti prirodan broj. Dakle,

$$\frac{6072-5k}{6}\in\mathbf{N},\ \text{odnosno}\ 1012-\frac{5k}{6}\in\mathbf{N}. \quad \text{1 bod}$$

To će biti ispunjeno ako je dani izraz pozitivan i ako je $k=0$ ili prirodni višekratnik broja 6. 1 bod

Tada iz $1012-\frac{5k}{6}>0$ dobivamo da je $k\leqslant 1214$. 1 bod

Prirodnih višekratnika broja 6 koji su manji od 1214 ima koliko iznosi kvocijent pri dijeljenju broja 1214 sa šest, a to je 202. Dodamo li i slučaj $k=0$, konačan broj traženih članova je 203. 1 bod

Zadatak B-4.7.

Osnovka uspravne četverostrane piramide visine duljine h je pravokutnik sa stranicama duljina a i b. Duljina svih bočnih bridova iznosi $\frac{\sqrt{94}}{2}$ cm, a obujam piramide je 9 cm^3. Ako su brojevi a, b i h redom uzastopna tri člana rastućeg geometrijskog niza, odredite a i b.

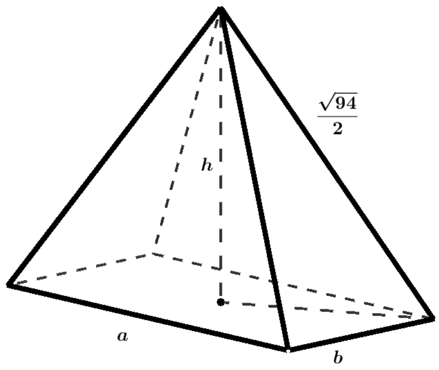
Rješenje.

Iz formule za obujam piramide slijedi

$$V=\frac{Bh}{3}=\frac{abh}{3}=9,\qquad abh=27, \quad \text{1 bod}$$

a zbog svojstva geometrijskog niza je $b^2=ah$. 1 bod

Iz posljednje dvije jednakosti dobivamo da je $b^3=27$, odnosno $b=3$. 1 bod



Za duljine bočnog brida, visinu i pola dijagonale osnovke vrijedi

$$\left(\frac{\sqrt{94}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2+b^2}{4},$$ 1 bod

odnosno $a^2+b^2 = 4\left(\frac{47}{2} - h^2\right)$. Budući da je $b = 3$ i $b^2 = ah$, rješavamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$a^2 + 4h^2 = 85, \qquad ah = 9.$$ 2 boda

Ovaj se sustav svodi na bikvadratnu jednadžbu $a^4 - 85a^2 + 324 = 0$, 2 boda

odnosno jednadžbu $(a^2-4)(a^2-81) = 0$.

Pozitivna realna rješenja te jednadžbe su 2 i 9. 1 bod

Budući je zadani niz rastući rješenje zadatka je $a = 2$ cm, $b = 3$ cm. 1 bod

Napomena: Ako je netko sustav sveo na bikvadratnu jednadžbu $4h^4 - 85h^2 + 81 = 0$ slijedi da je $(h^2-1)(4h^2-81) = 0$, pa je $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 4.5$ cm. Tada iz $a = \frac{9}{h}$ i monotonosti niza slijedi konačno rješenje $a = 2$ cm, $b = 3$ cm.